Ministerul Educației şi Cercetării
Serviciul Național de Evaluare şi Examinare

A 54-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană - Municipiul Bucureşti

8 martie 2003

CLASA A IX-A

Subiectul 1

Determinați funcțiile $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq 1$,

$$f(1) + f(2) + ... + f(n)$$

este un cub perfect cel mult egal cu n^3.

Subiectul 2

Aflați $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ şi cifrele $a_1, a_2, ... a_n$, astfel ca

$$\sqrt{\overline{a_1a_2...a_n}} - \sqrt{\overline{a_1a_2...a_{n-1}}} = a_n$$

Subiectul 3

Pe o tablă sunt desenate punctele A, B, C, D. Vlad construieşte punctele A', B', C', D' astfel: A' este simetricul lui A față de B, B' este simetricul lui B față de C, C' este simetricul lui C față de D, iar D' este simetricul lui D față de A. Maria şterge de pe tablă punctele A, B, C, D. Poate Vlad să refacă pozițiile acestor puncte? Justificați răspunsul, folosind eventual vectori.

Subiectul 4

Spunem că o mulțime A de vectori nenuli din plan are proprietatea (S) dacă are cel puțin trei elemente şi pentru orice $\vec{u} \in A$ există $\vec{v}, \vec{w} \in A$ astfel încât $\vec{v} \neq \vec{w}$ şi $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

a) Demonstrați că, pentru orice $n \geq 6$, există o mulțime cu n vectori nenuli, care are proprietatea (S).

b) Demonstrați că orice mulțime finită de vectori nenuli, care are proprietatea (S), are cel puțin 6 elemente.

Timp de lucru: 3 ore